

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية (u_n) الهندسية حدودها موجبة من أجل كل عدد طبيعي n حيث:

$$\begin{cases} \ln(u_2) - \ln(u_4) = 4 \\ \ln(u_1) + \ln(u_5) = -12 \end{cases}$$

(1) بين أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = \frac{1}{e^2}$ ثم عين حدها الأول u_0 .

(2) احسب u_n بدلالة n .

(3) أاحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بداحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

بداحسب المجموع $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ حيث:

ح. عين قيمة n حتى يكون $T_n^2 = 2^{30}$

التمرين الثاني: 07 نقاط

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $u(x) = ax^2 + b + c \ln x$

حيث a و b و c أعداد حقيقية و (C_u) تمثيلها البياني الموضح في الشكل

والذي يشمل النقطتان $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\right)$ و $B(1, -1)$

والنقطة A هي نقطة إنعطاف

(1) جد الأعداد الحقيقية a و b و c وبرهن أن $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$

(2) أكتب جدول تغيرات الدالة u

(3) المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب حصره على مجال من الشكل

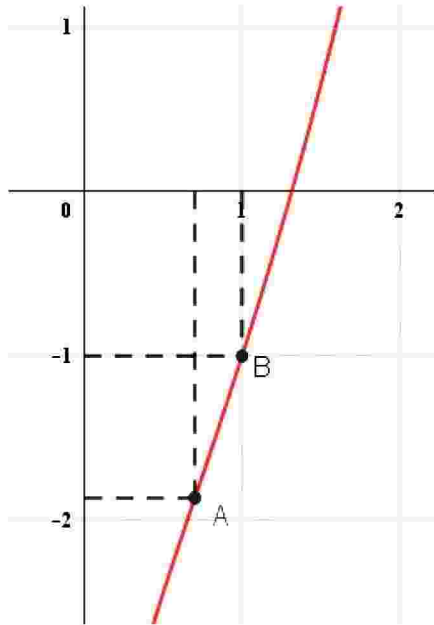
$\left] \frac{n}{100}, \frac{n+1}{100} \right[$ حيث n عدد طبيعي يطلب تعيينه

(4) أدرس إشارة $u(x)$ ثم برهن أن $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$

(5) نعتبر الدالة v حيث $v(x) = u(e^{-x})$

(a) أحسب الدالة المشتقة للدالة v ثم بين أن الدالة v متناقصة تماما على مجموعة تعريفها \mathbb{R}

(b) أكتب عبارة الدالة v ثم أحسب نهايات الدالة v



التمرين الثالث: 09 نقاط

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1- أحسب $g'(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- بين أن: $g(x) \geq 0$ لكل x من \mathbb{R} (لاحظ أن $g(0) = 0$) ثم أستنتج أن: $e^{-x} + x \geq 1$ لكل x من \mathbb{R}

(II) نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x والمعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) وحدة الأطوال 2 cm

(1) 1. بين أن: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لكل x من \mathbb{R}^* .

2. بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجةين بيانياً. (نقبل أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

(2) 1. بين أن: $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ لكل x من \mathbb{R} .

2. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- أكتب معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة O مبدأ المعلم.

ب- تحقق أن: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ لكل x من \mathbb{R} ثم أدرس إشارة $x - f(x)$ على \mathbb{R} .

ج- أستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

(4) أنشئ (Δ) و (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

1- بين بالتراجع أن: $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N} .

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة (يمكن إستعمال نتيجة السؤال 3II ب)

3- أستنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

انتهى ...

😊 بالتوفيق 😊
أستاذ المادة